Exercices de rappels d'applications et de réflexions *sur L'ARITHMETIQUE*

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

TD : d'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels avec corrections

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156
12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8
Solution :1) 156 a 12 diviseurs :
1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.
156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.
2) D_{-8} = {−8, −4, −2, −1, 1,2,4,8}

Exercice2 : 1) $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$

1) c) $\begin{cases} a/x-y \\ a/b-c \end{cases} \Rightarrow a/bx-by \text{ et } a/by-cy \Rightarrow a/bx-cy$

2) $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

$\Rightarrow a/12n+1 \text{ et } a/-12n+18 \Rightarrow a/19$

$\Rightarrow a\in\{\pm1;\pm19\}$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

$\Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } a/(2n-1)^2 \Rightarrow d/4n^2+12 \text{ et } d/4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d/11+4n \text{ et } d/-2+4n \Rightarrow d/13$

Exercice3 : $a\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

Solution : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/2(5x-7)-5(2x+3)$

$a/10x-14-10x-15 \Rightarrow a/-29 \Rightarrow a/29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$
1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$:
3 divise 4^n-1 **Solution :**
Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$
1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons
$4^0-1=0$ est un multiple de 3
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$ donc
$4^n=3k+1$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :
$\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}-1=3k'$??
$4^{n+1}-1=4\times4^n-1$
$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$
avec $k'=4k+1$ Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a :
$\forall n\in\mathbb{N}; 4^n-1$ est divisible par 9

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$
Solution : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$
$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc
$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc $n+2/5$
Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que $n+2\in\{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que
$n\in\{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n\in\{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.
Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ Représente un entier relatif ?

Solution : Cette fraction a un sens si : $n+4\neq 0$ soit $n\neq -4$ On constate que $3n+8=3(n+4)-4$
$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.
Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.
Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$
On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.
Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$
b) $2xy+2x+y=99$

Solution :a) $x^2-y^2=32\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=32$
$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32
Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair
Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$
On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99\Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$
$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1\Leftrightarrow(2x+1)(y+1)=100$
Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100 : $D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

Exercice9 :déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p\in\mathbb{N})$

Solution: $n\in\mathbb{N}$: $n=25p+p^2$ et $0\leq p^2\prec 25$ donc $0\leq p\prec 5$

Donc : $\begin{cases}p=0\\n=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}p=1\\n=26\end{cases}$ ou $\begin{cases}p=2\\n=54\end{cases}$ ou $\begin{cases}p=3\\n=84\end{cases}$ ou $\begin{cases}p=4\\n=116\end{cases}$

Donc : $n\in\{0;26;54;84;116\}$

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution: soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :
$n=aq+r$ et $0\leq r\leq a-1$ et on a : $q=bq'+r'$ et $0\leq r'\leq b-1$ donc on déduit que :
$n=a(bq'+r')+r=abq'+ar'+r$
Et puisque : $0\leq r'\leq b-1$ et $0\leq r\leq a-1$ alors : $ar'+r\leq ab-1$ donc $n=abq'+ar'+r$
$0\leq ar'+r\leq b-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{Z}$
si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :
$a-1=bq+r$ et $0\leq r\prec b$
Donc : $ab^9-b^9=b^{10}q+rb^9$
Donc : $ab^9-1=b^{10}q+rb^9+b^9-1$
Donc : $ab^9-1=b^{10}q+(r+1)b^9-1$
On montre que : $0\leq(r+1)b^9-1\prec b^{10}$???
On a : $0\leq r\prec b$ donc $0\leq r+1\leq b$
donc $0\leq(r+1)b^9\leq b^{10}$ donc $0\leq(r+1)b^9-1\leq b^{10}-1$
donc $0\leq(r+1)b^9-1\prec b^{10}$
conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}
b) L'inverse est-il vrai ?

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont–ils premiers :499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2+3n$ $n\in\mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :
a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$

Exercice16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n+2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution :1)on pose $d = A \wedge B$ et $d' = (n+2) \wedge 7$

On a : $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$

$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2 \Rightarrow d/(n+2) \wedge 7 \Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A \wedge B$ donc d'/d

donc d/d' et d'/d et $d \in \mathbb{N}$ et $d' \in \mathbb{N}$ donc

donc $d = d'$ donc : $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A \wedge B$ Donc : $n+2/(n+2) \wedge 7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1;7\}$ ce qui entraine que $n = 5$

Exercice 17:
1- Montrer que tout diviseur commun de : $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b.
3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels : $a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution :1)on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b \wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a \wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2)on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$
montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution :1)on pose $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/35a+57$ et $d/45a+76$

$\Rightarrow d/9(35a+57)$ et $d/7(45a+76)$

$\Rightarrow d/315a+513$ et $d/315a+532$

$\Rightarrow d/19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraine que :
$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:
1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$
2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution:1)**(1)** $67 = 1 \times 39 + \boxed{28}$ **(2)** $39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$

(3) $28 = 2 \times 11 + \boxed{6}$ **(4)** $11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$

(5) $6 = 1 \times 5 + \boxed{1}$ **(6)** $5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6=1\times5+\boxed{1} \Rightarrow 6-1\times5=\boxed{1}$

$\Rightarrow 6-1\times(11-1\times6)=\boxed{1} \Rightarrow 2\times6-1\times11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times(28-2\times11)-1\times11=\boxed{1} \Rightarrow 2\times28-5\times11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times28-5\times(39-1\times28)=\boxed{1} \Rightarrow 7\times28-5\times39=\boxed{1}$

$\Rightarrow 7\times(67-1\times39)-5\times39=\boxed{1} \Rightarrow \boxed{7\times67-12\times39=\boxed{1}}$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :
1) $n\wedge(n+1)=1$ 2) $n\wedge(2n+1)=1$
3) $(2n+1)\wedge(3n+1)=1$

Exercice22: $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19
Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :
1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution : 1)On a : $a\equiv17[19]$ et $b\equiv15[19]$
donc : $a+b\equiv17+15[19] \Leftrightarrow a+b\equiv13[19]$
Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a\equiv17[19]\Rightarrow a^2\equiv17^2[19]\Rightarrow a^2\equiv4[19]$
$b\equiv15[19]\Rightarrow b^2\equiv15^2[19]\Rightarrow b^2\equiv16[19]$
Donc : $a^2+b^2\equiv4+16[19]\Leftrightarrow a^2+b^2\equiv1[19]$
Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a\equiv17[19]\Rightarrow 2a\equiv2\times17[19]\Rightarrow 2a\equiv15[19]$(1)
$b\equiv15[19]\Rightarrow 5b\equiv5\times15[19]\Rightarrow 5b\equiv18[19]$
Donc : $5b\equiv-1[19]\Rightarrow -5b\equiv1[19]$(2)
De **(**1) et (2) on déduit que :
$2a-5b\equiv15+1[19]\Rightarrow 2a-5b\equiv16[19]$
Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice23 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n
2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}
3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n+5n+2\equiv0[10]$

Solution :1) $3^n\equiv r[10]$ et $r\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
On a : $3^0\equiv1[10]$ et $3^1\equiv3[10]$ et $3^2\equiv9[10]$
et $3^3\equiv7[10]$ et $3^4\equiv1[10]$
Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$
On a : $3^4\equiv1[10]$ donc : $(3^4)^k\equiv1^k[10]$

donc : $3^{4k}\equiv1[10]$ et $3^{4k+1}\equiv3[10]$ et $3^{4k+2}\equiv9[7]$
et $3^{4k+3}\equiv7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10
cad : on cherche r tel que : $2019^{2020}\equiv r[10]$??
On a : $2019=2010+9$ donc : $2019\equiv9[10]$
donc : $2019^{2020}\equiv9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv3^{4040}[10]$
or : $4040=4\times1010=4\times k$
donc : $2019^{2020}\equiv3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv1[10]$
le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1
Autre méthode **:** $2019\equiv9[10]$
donc : $2019\equiv-1[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv1[10]$	$\equiv3[10]$	$\equiv9[10]$	$\equiv7[10]$
$5n$	$\equiv0[10]$	$\equiv5[10]$	$\equiv0[10]$	$\equiv5[10]$
3^n+5n+2	$\equiv3[10]$	$\equiv0[10]$	$\equiv1[10]$	$\equiv4[10]$

donc : $3^n+5n+2\equiv0[10]\Leftrightarrow n=3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice24 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}\equiv3[10]$

Solution :1)on a : $(n+2)^{n+2}=\sum_{k=0}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$$(n+2)^{n+2}=C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2}+C_{n+2}^1 n 2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2}=2^{n+2}+(n+2)n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

Donc : $(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+n^2+2n)+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$$(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+2n)+2^{n+1}n^2+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(1+n)=n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)$$

on a : $n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)\equiv0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv0[n^2]$

2) on a : $7\equiv7[10]$ et $7^2\equiv-1[10]$ donc $7^4\equiv1[10]$
Donc : $7^{4k}\equiv1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv9[10]$
$7^{4k+3}\equiv3[10]$
On aussi : $7\equiv3[4]$ et $7^2\equiv1[4]$

Donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}} \equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}} \equiv 3[10]$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3 + n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7

6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 6

Exercice26 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

1)montrer que $x \wedge y = a \wedge b$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a)montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$

b)en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$

c)montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d)en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution :1)on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$d = x \wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b

Car il divise toute combinaison de x et y

$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$

Inversement :

$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$

$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$

$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$

donne : $n^2 + 5n + 13 = (n+3)(n+2) + 7$

Donc : $a = b(n+2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n+2) = 7$

on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a-b(n+2)$ et d/b

$\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$

$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et d'/b

$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??

on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$

donc : $d/7$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$

c)montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n+3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4

$n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$ ou $n \equiv 6[7]$

Exercice27: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\overline{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1)On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que Cette équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \varnothing$

1)On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2) $\overline{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si $\bar{k} = \bar{0}$: $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$ Si $\bar{k} = \bar{1}$: $S = \{\bar{3}\}$

Si $\bar{k}=\bar{2}$: $S=\varnothing$ Si $\bar{k}=\bar{3}$: $S=\{\bar{1}\}$

Exercice28 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\bar{3}y=\bar{1}$

Solution : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$ Comme suite

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$S=\left\{(\bar{0};\bar{2});(\bar{1};\bar{0});(\bar{2};\bar{3});(\bar{3};\bar{1});(\bar{4};\bar{3});(\bar{4};\bar{4})\right\}$

Exercice29 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$

Solution :

$\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\bar{3}+\bar{2})x+(\bar{2}+\bar{4})y=\bar{3}+\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$

$\begin{cases}y=\bar{4}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\bar{1}\\ y=\bar{4}\end{cases}$ donc $S=\left\{(\bar{1};\bar{4})\right\}$

Exercice30 : déterminer : $d=(-8316)\wedge 1080$ et $m=8316\vee 1080$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316=2^2\times 3^3\times 7\times 11$ et

$1080=2^3\times 3^3\times 5$

$d=8316\wedge 1080=2^2\times 3^3=108$ et

$m=8316\vee 1080=2^3\times 3^3\times 5\times 7\times 11=11880$

Exercice31: si $2=a\wedge b$ et $-12=a\times b$

déterminer : $a\vee b$

Solution : on a $a\wedge b)\times(a\vee b)=|ab|$

donc : $a\vee b=|a\times b|/a\wedge b=|-12|/2=6$

Exercice32: $a=(25^n-1)(36^n-1)$ et $b=(5^n-1)(6^n-1)$

Calculer les $a\vee b$ $(n\in\mathbb{N})$

Solution :

$a=\left((5^n)^2-1\right)\left((6^n)^2-1\right)=(5^n-1)(5^n+1)(6^n-1)(6^n+1)$

$a=b(5^n+1)(6^n+1)$ donc : b/a donc : $a\vee b=a$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien